

§0 Overview

_____ : 後で説明

ベクトル束と K 群

X : コンパクト Hausdorff 空間

$\pi: E \rightarrow X$: X 上のベクトル束

$Vect(X)$: X 上のベクトル束の同型類全体

\curvearrowright $[E], [F] \in Vect(X)$ に対して $[E] + [F]$ が定まる

\rightsquigarrow $Vect(X)$ は単位元をもつ可換モノイド \leftarrow 群の公理から逆元の存在を降いたもの

$Vect(X) \xrightarrow{\text{群完備化}} K(X)$: 位相的 K 群
 \leftarrow アーベル群

K はコンパクト Hausdorff 空間の圏からアーベル群の圏への反変関手になっている

§1

$f: X \rightarrow Y$: 連続 \Rightarrow f^* : $K(Y) \rightarrow K(X)$: 群準同型 が定まる

特に, $X \cong Y$: 同相 $\Rightarrow K(X) \cong K(Y)$: 同型

K 群と Bott 周期性

$\leftarrow K^0(X) = K(X)$

$n \geq 0$ に対して, アーベル群 $K^{-n}(X)$ が定まる

Bott 周期性 : $K^{-(n+2)}(X) \cong K^{-n}(X)$, $\forall n \geq 0$

$\leftarrow \mathcal{U} := \varinjlim \mathcal{U}(m)$

\bullet $K^{-(n+2)}(X) \cong K^{-n}(X)$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow \pi_i(\mathcal{U}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i: \text{odd}) \\ 0 & (i: \text{even}) \end{cases}$ (2-勾り-群に対す Bott 周期性)

\bullet 逆に, Bott による Bott 周期性の証明から, K 群に対する Bott 周期性が出る

Bott 周期性の証明

\leftarrow "elementary proof"

§2

\bullet Atiyah - Bott (1964)

: ベクトル束の 貼り合わせ関数 を簡略化していくことで証明

§3

\bullet Atiyah (1967)

: Fredholm 作用素の核の指数 を使って証明

§1 ベクトル束とK理論

§1.1 ベクトル束

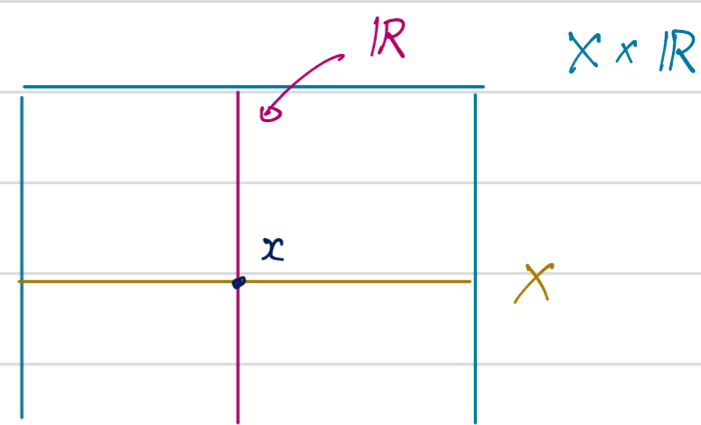
$K = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} とする.

X : 位相空間 に対して,

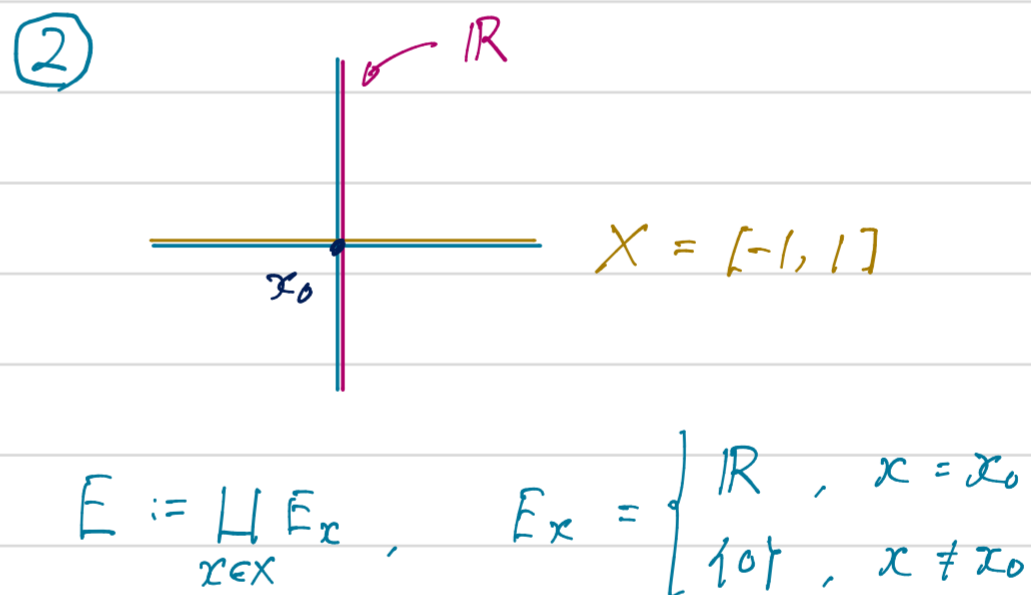
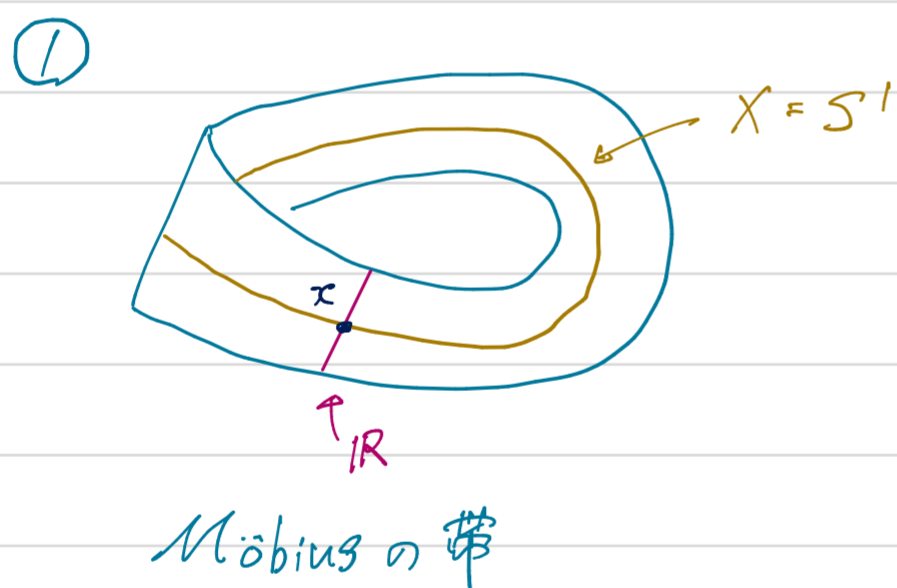
直積 $X \times K^n$ は

各点 $x \in X$ にベクトル空間 K^n がのっている空間
と考える.

→ このように X の各点 に対して ベクトル空間 が 定まっているものを
= ベクトル束の族

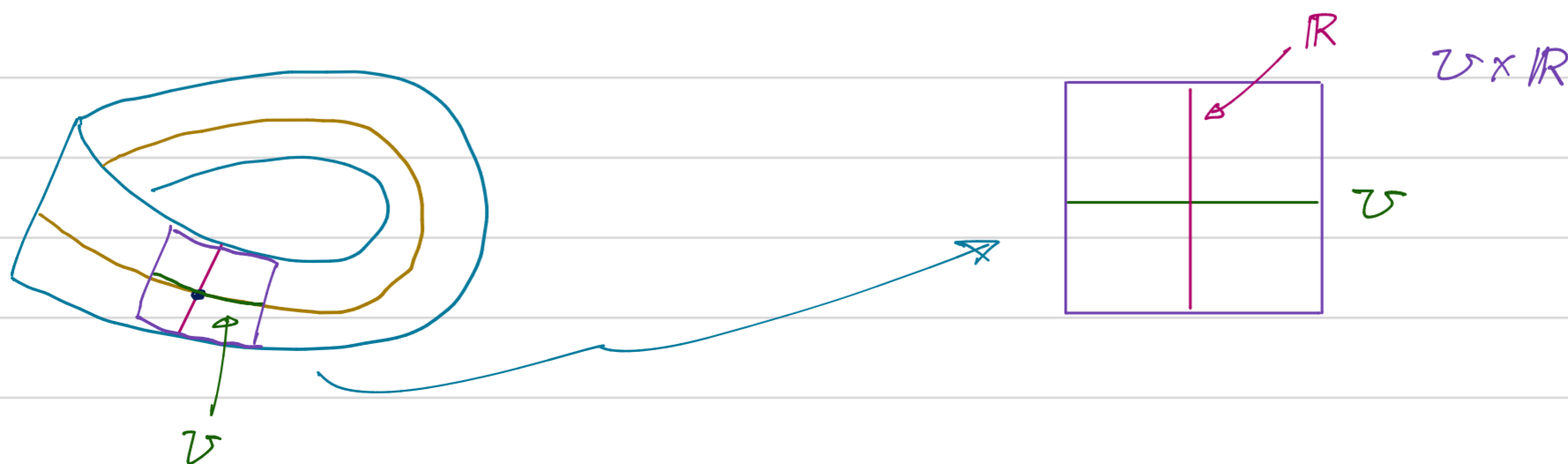


直積でないベクトル束の族もある:



①, ② の違い :

① は 任意の点の近傍で 局所的には直積 になっている



※ ② は x_0 の近傍で直積にならない

Def 1.1

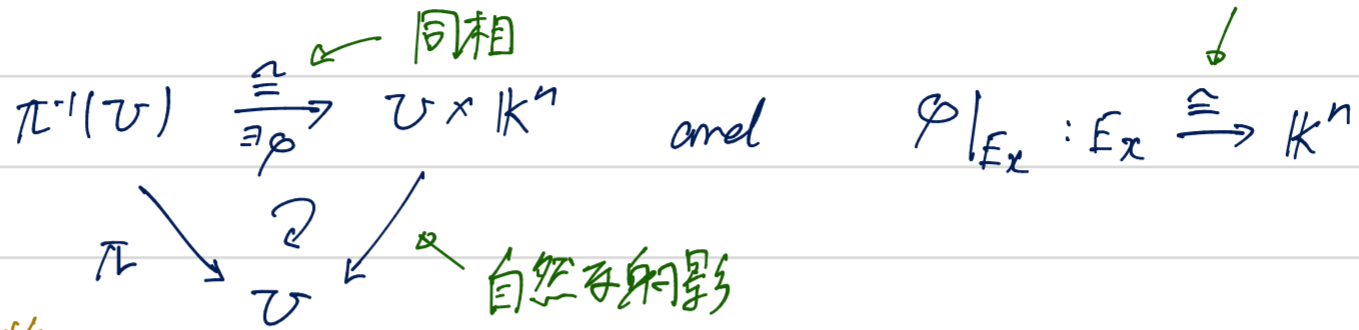
$\pi: E \rightarrow X$ が \mathbb{K} -ベクトル束

\Leftrightarrow $E_x := \pi^{-1}(x)$ は \mathbb{K} -ベクトル空間

$\forall x \in X, \exists U \ni x$: 辺傍, $\exists n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

\mathbb{K} -ベクトル空間 $\cong \mathbb{R}$ の同型

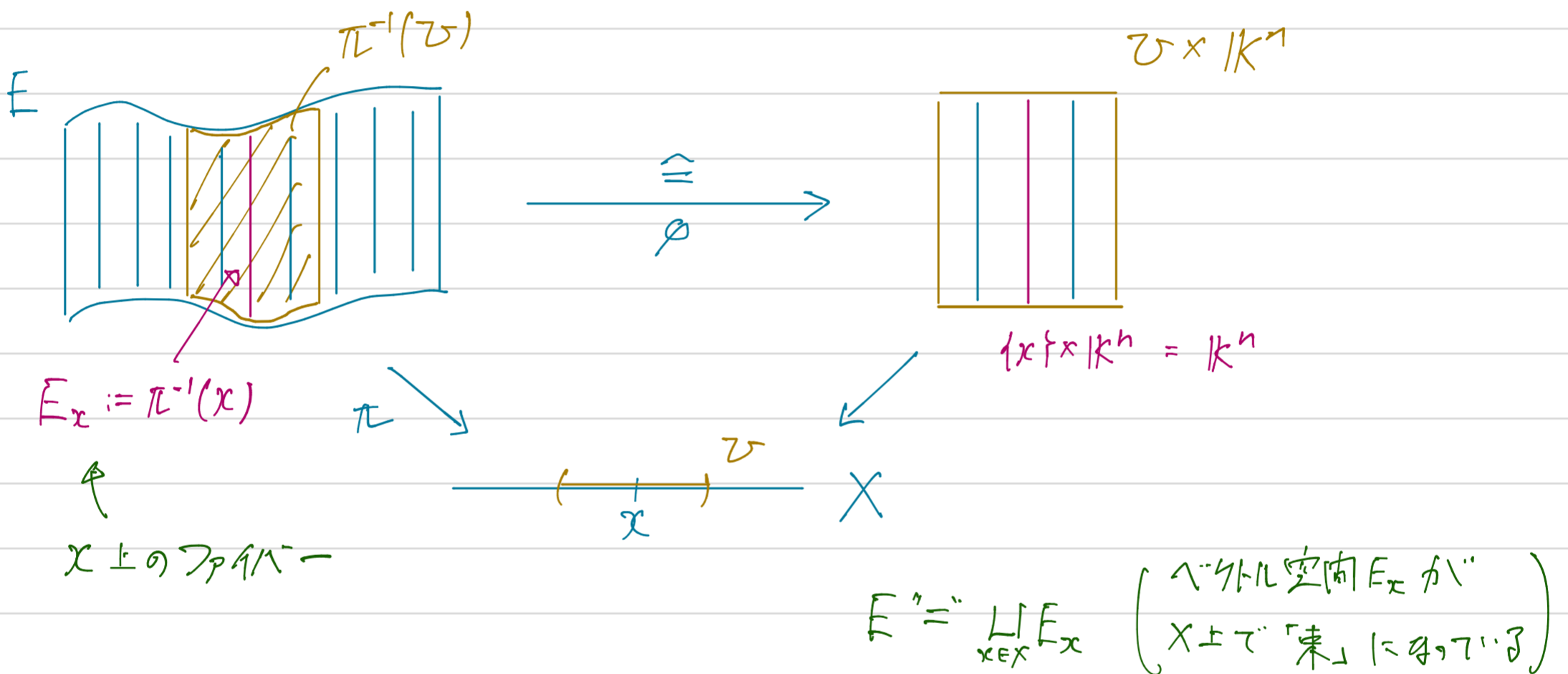
す. ち.



局所自明性

自然射影

$E_x = \pi^{-1}(x)$ は x 上の ファイバー といふ



ベクトル束の作りか.

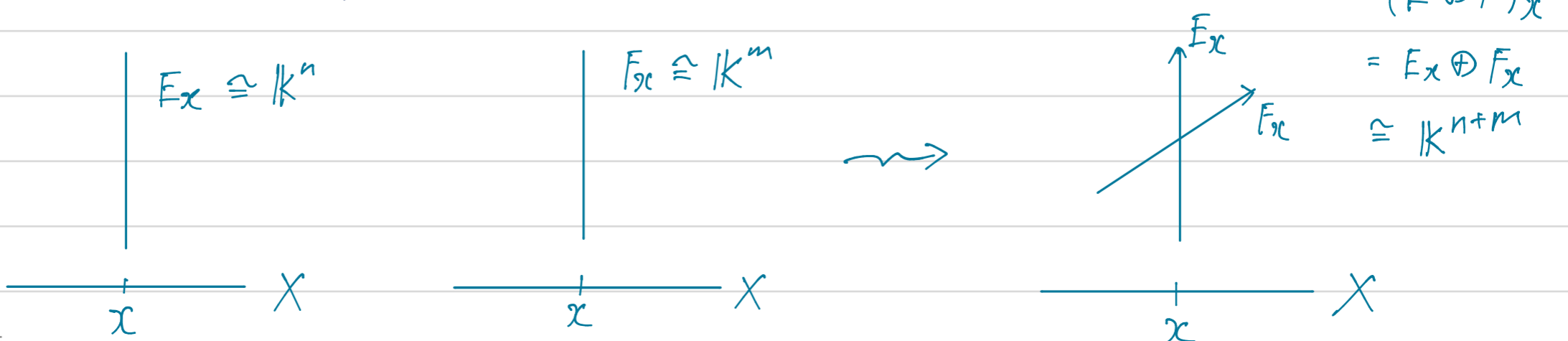
Whitney 和 といふ

① 直和:

ベクトル束 $E \rightarrow X$ と $F \rightarrow X$ に対して,

直和 $E \oplus F \rightarrow X$ は次の様に定める

$$E \oplus F := \bigsqcup_{x \in X} E_x \oplus F_x \quad (\text{i.e. 各ファイバーで直和をとる})$$



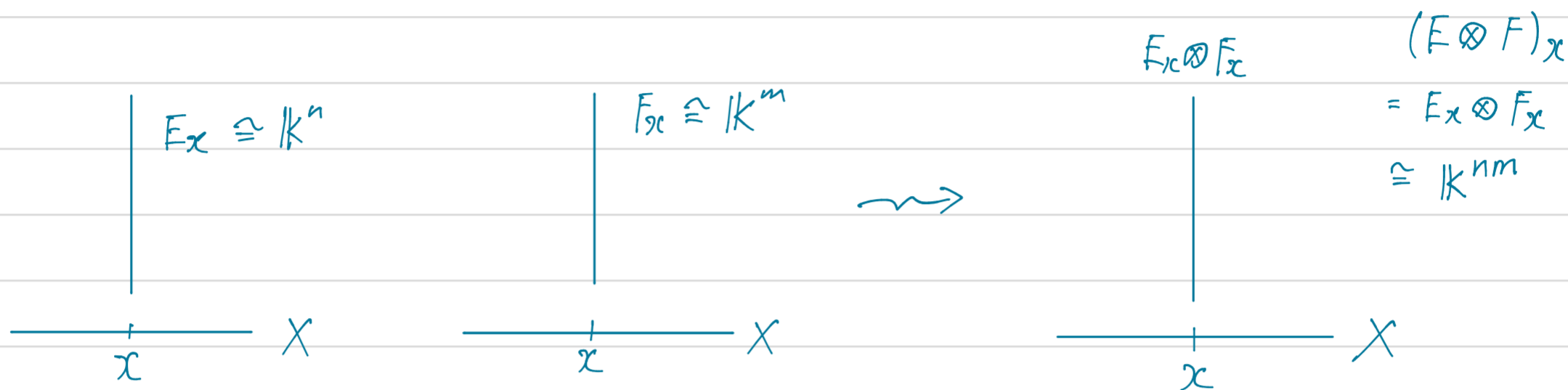
$$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x \cong \mathbb{K}^{n+m}$$

② テンソル積 :

ベクトル束 $E \rightarrow X$ と $F \rightarrow X$ に対して,

テンソル積 $E \otimes F \rightarrow X$ を次の様に定める

$$E \otimes F := \bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x \quad (\text{i.e. 各ファイバ-上でテンソル積をとる})$$

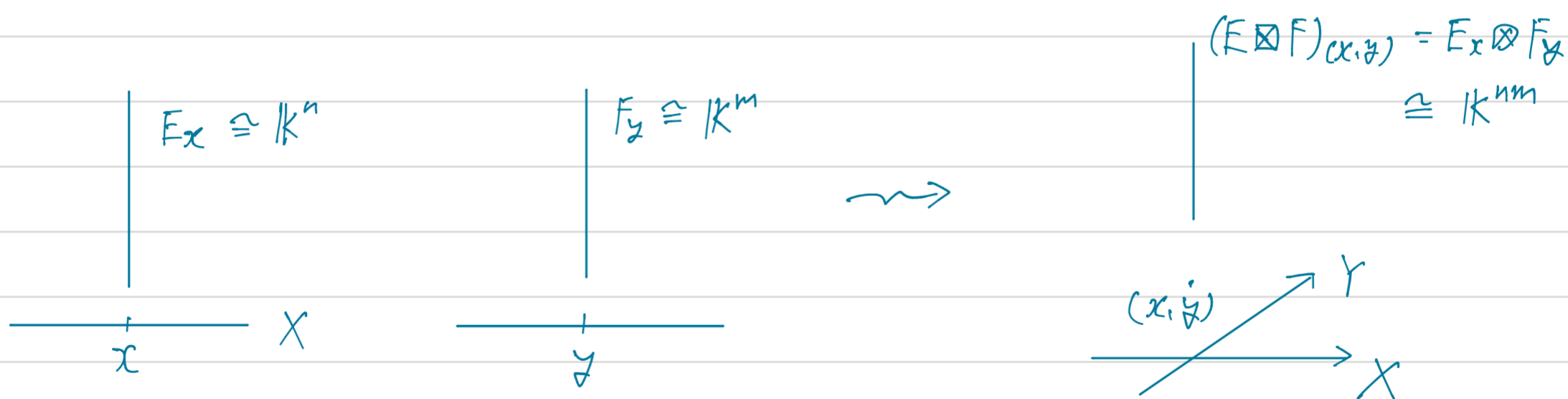


③ 外部テンソル積 :

ベクトル束 $E \rightarrow X$ と $F \rightarrow Y$ に対して,

外部テンソル積 $E \boxtimes F \rightarrow X \times Y$ を次の様に定める。

$$E \boxtimes F := \bigsqcup_{(x,y) \in X \times Y} E_x \otimes F_y \quad (\text{i.e. } (x,y) \text{ 上のファイバ-を } E_x \otimes F_y \text{ とする})$$

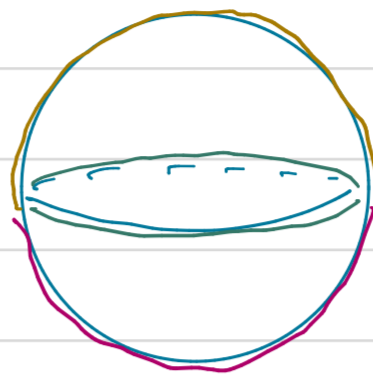


④ 貼り合わせ: $(X_1, X_2: \text{コンパクト Hausdorff})$
 $A \subset X: \text{閉集合}$

$X = X_1 \cup X_2, A = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$



$X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$
 $X_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$
 $X_2 = \{e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$
 $A = \{1, -1\}$



$X = S^2$
 $X_1 = \text{上半球}$
 $X_2 = \text{下半球}$
 $A = S^1$

このとき,

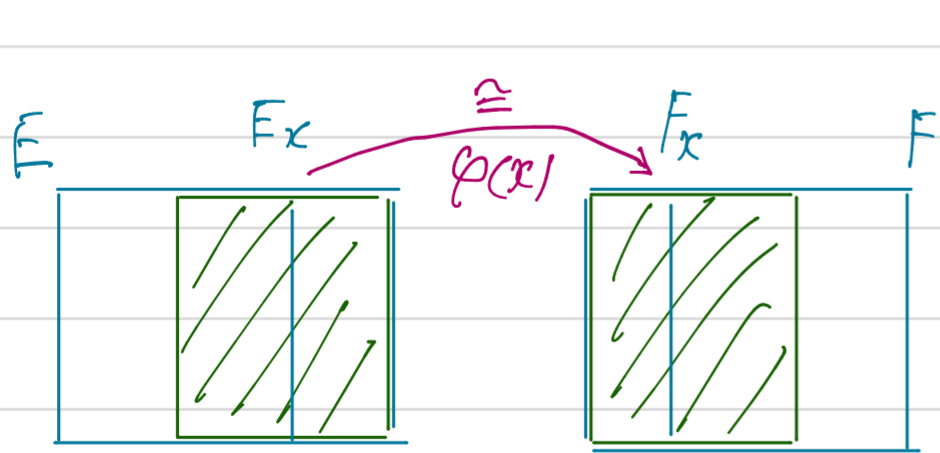
$E: X_1 \text{ 上の } \wedge\text{-ノルム束}, \dim E_x = n$
 $F: X_2 \text{ 上の } \wedge\text{-ノルム束}, \dim F_x = n$
 $\varphi: A \rightarrow \text{Iso}(E|_A, F|_A): \text{連続写像}$

← 変換関数や貼り合わせ関数
 という

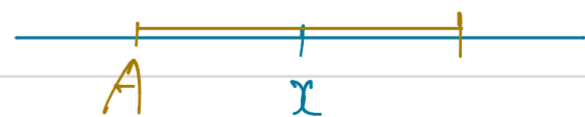
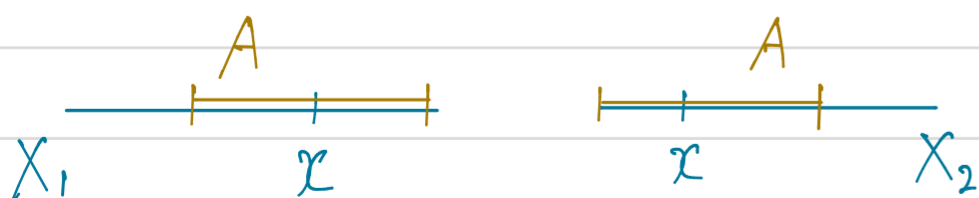
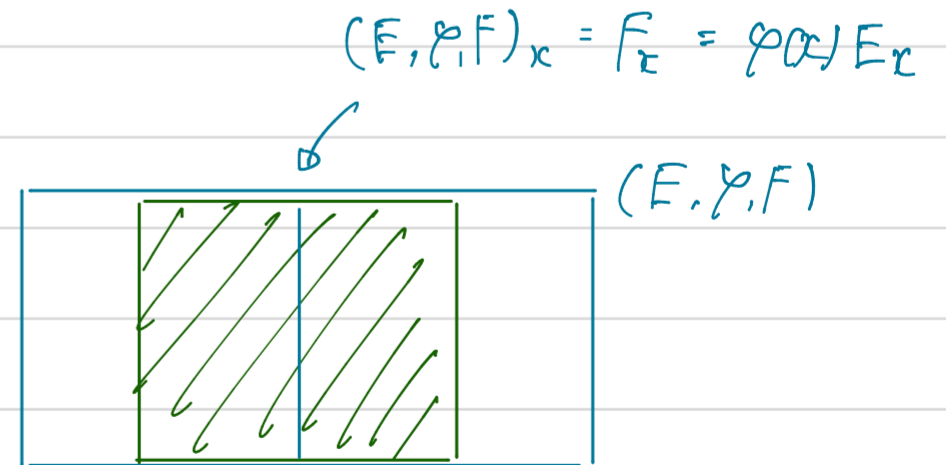
から $X = X_1 \cup X_2$ 上の $\wedge\text{-ノルム束 } (E, \varphi, F)$ は次の様にして構成できる。

$(E, \varphi, F) := (E \sqcup F) / \sim$

$e \sim f \iff e=f \text{ or } e \in E_x, f \in F_x$
 かつ $f = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \text{Iso}(E_x, F_x)} e$



$\varphi(x) \in \text{Iso}(E_x, F_x)$
 "貼り合わせる"



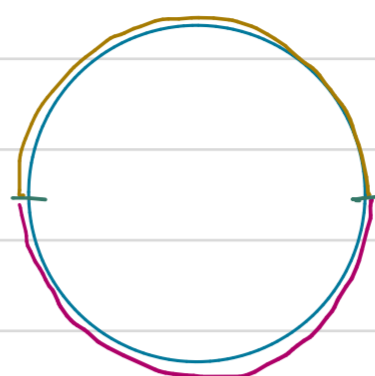
Ex $X = S^1$, $X_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $X_2 = \{e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$

$A = \{1, -1\}$

$E := X_1 \times \mathbb{R}$, $F := X_2 \times \mathbb{R}$

$\varphi: A \rightarrow GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\begin{matrix} \subset & \subset \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$



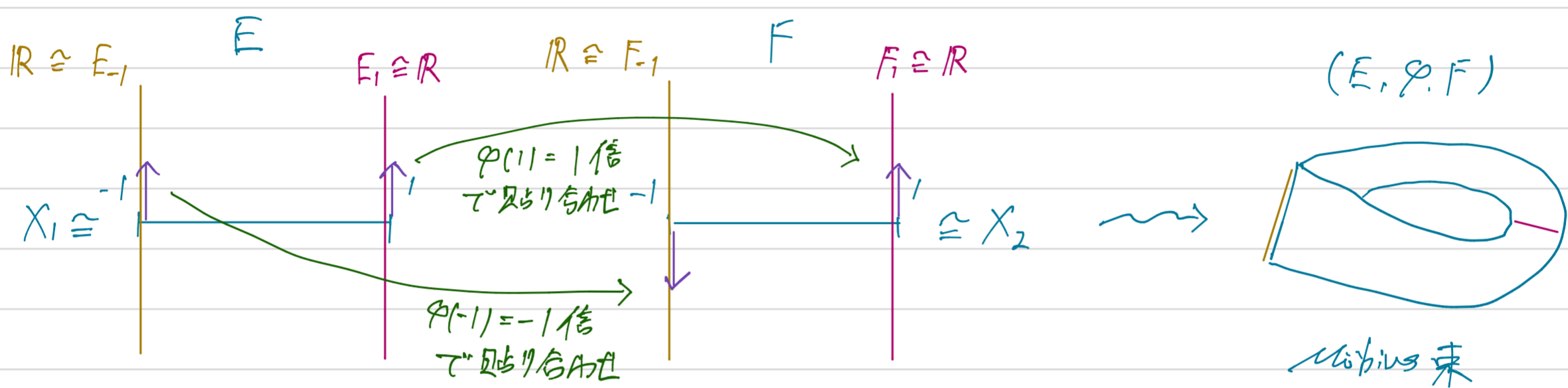
$X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

$X_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$

$X_2 = \{e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$

$A = \{1, -1\}$

$\Rightarrow (E, \varphi, F) = \text{Möbius の帯}$
(Möbius 束という)



Ex $X = S^2$, $X_1 = \text{上半球}$, $X_2 = \text{下半球}$, $A = S^1$

$E = X_1 \times \mathbb{C}$, $F = X_2 \times \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$

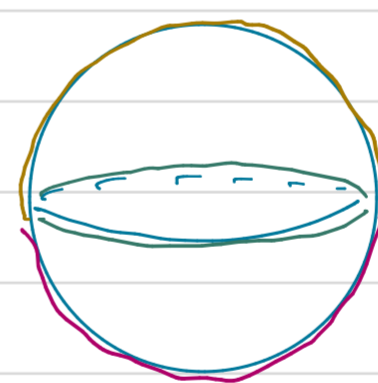
$\phi_k: S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\begin{matrix} \subset & \subset \\ e^{i\theta} & \mapsto & e^{ik\theta} \end{matrix}$
↙ k 回転

≥ 772き,

$H^{-k} := (E, \phi_k, F)$

≥ かく.



$X = S^2$

$X_1 = \text{上半球}$

$X_2 = \text{下半球}$

$A = S^1$

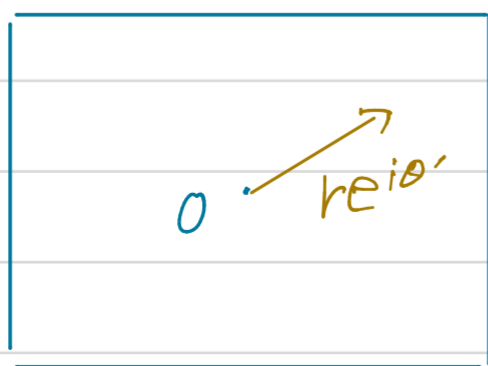
$re^{i\theta'} \in E_{e^{i\theta}} \cong$

$\phi_k(e^{i\theta})(re^{i\theta'}) = re^{i(\theta+k\theta')} \in F_{e^{i\theta}}$

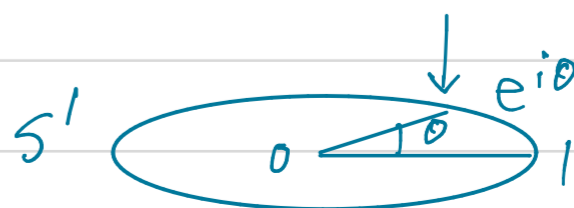
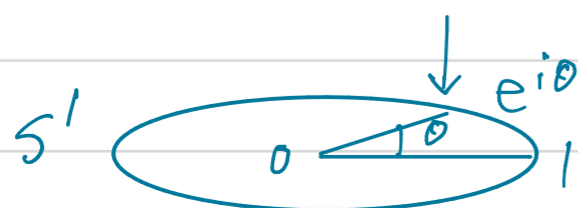
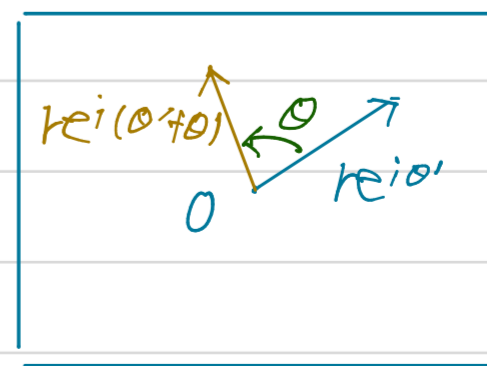
$e^{i\theta} \geq \text{同-視}$

$\phi_k(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$

$\mathbb{C} = E_{e^{i\theta}}$



$F_{e^{i\theta}} = \mathbb{C}$



ベクトル束の同型

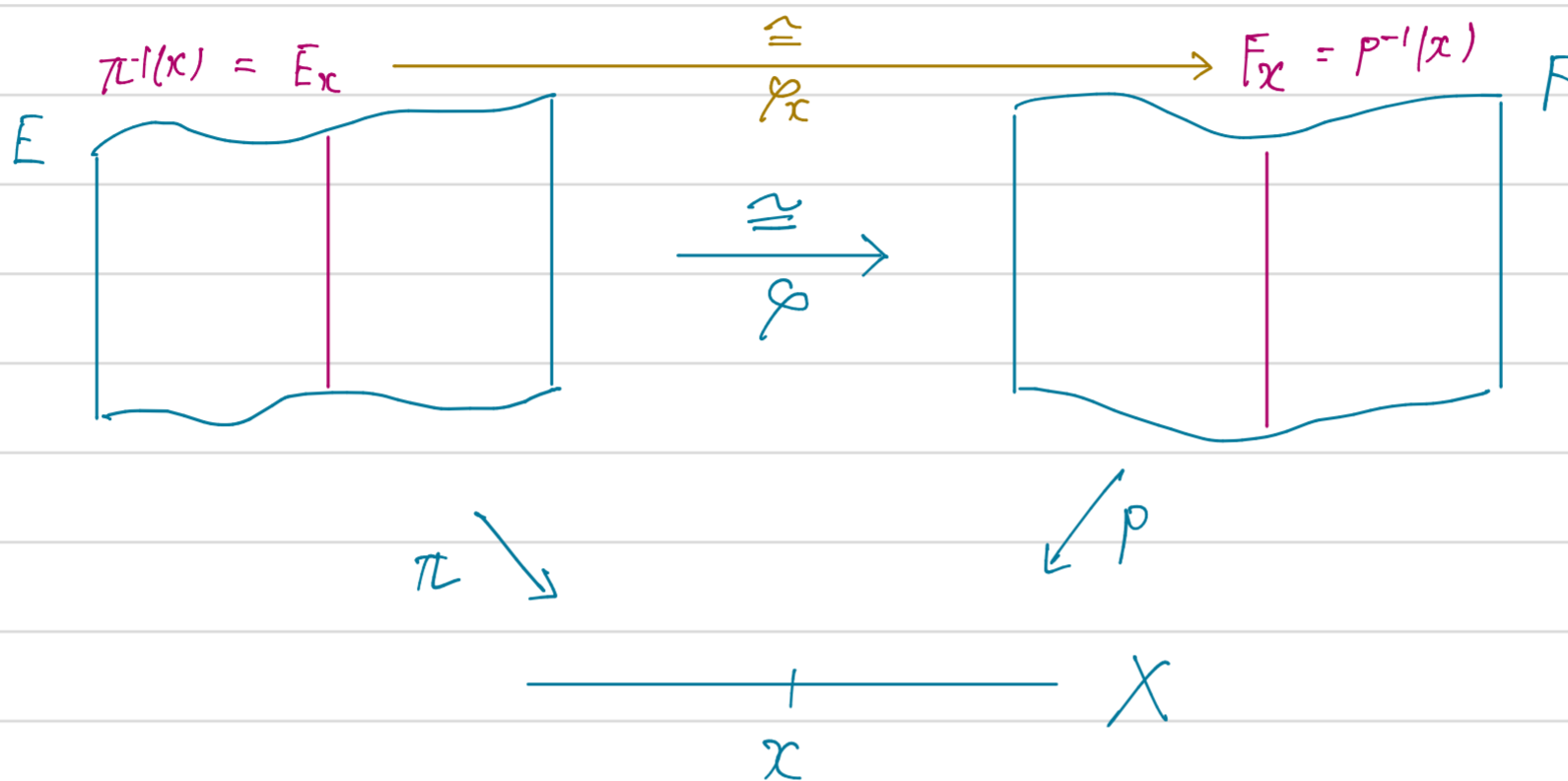
- ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} X \simeq F \xrightarrow{p} X$ が同型 ($E \cong F$ しかく)

\Leftrightarrow $\exists \varphi: E \xrightarrow{\cong} F$: 同相

\swarrow \mathbb{K} -ベクトル空間上の同型

$$\text{A.K. } E \xrightarrow[\varphi]{\cong} F \quad \text{and} \quad \varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \xrightarrow{\cong} F_x$$

$$\begin{array}{ccc} & \cong & \\ \pi \searrow & \varphi & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$



Ex

$E \rightarrow X, F \rightarrow X, G \rightarrow X$: ベクトル束

$$\Rightarrow \begin{cases} E \oplus F \cong F \oplus E \\ E \otimes F \cong F \otimes E \\ E \otimes (F \oplus G) \cong E \otimes F \oplus E \otimes G \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2, \quad A = X_1 \cap X_2 \\ E^1 \rightarrow X_1, \quad E^2 \rightarrow X_2 \\ F^1 \rightarrow X_1, \quad F^2 \rightarrow X_2 \\ \varphi: A \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad \psi: A \rightarrow GL_m(\mathbb{C}) \end{array} \right. : \text{ベクトル束, } \begin{array}{l} \dim E_x^1 = \dim E_x^2 = n \\ \dim F_x^1 = \dim F_x^2 = m \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (E^1 \oplus F^1, \varphi \oplus \psi, E^2 \oplus F^2) \cong (E^1, \varphi, E^2) \oplus (F^1, \psi, F^2) \\ (E^1 \otimes F^1, \varphi \otimes \psi, E^2 \otimes F^2) \cong (E^1, \varphi, E^2) \otimes (F^1, \psi, F^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi \oplus \psi : A \rightarrow GL_{n+m}(\mathbb{C}) ; x \mapsto \varphi(x) \oplus \psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) & 0 \\ 0 & \psi(x) \end{pmatrix} \\ \varphi \otimes \psi : A \rightarrow GL_{nm}(\mathbb{C}) ; x \mapsto \varphi(x) \otimes \psi(x) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2, \quad A = X_1 \cap X_2 \\ E^1 \rightarrow X_1, \quad E^2 \rightarrow X_2, \quad \dim E^1_x = E^2_x = n \\ \varphi, \psi: A \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \varphi \simeq \psi \end{array} \right.$$

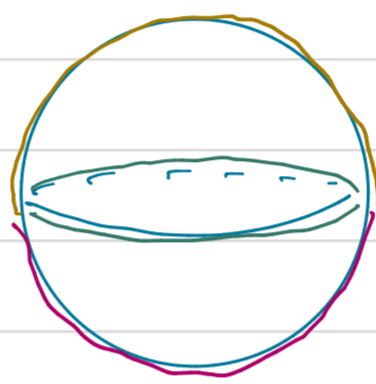
← 本質は $\mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{C}^1$

$$\Rightarrow (E^1, \varphi, E^2) \cong (E^1, \psi, E^2)$$

//

Ex

$$\left\{ \begin{array}{l} X = S^2, \\ D^+ := X_1 = \text{上半球} \\ D^- := X_2 = \text{下半球} \\ A = S^1 \\ \phi_R: S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \downarrow \\ e^{i\theta} \mapsto e^{iR\theta} \end{array} \right.$$



$$\begin{array}{l} X = S^2 \\ X_1 = \text{上半球} =: D^+ \\ X_2 = \text{下半球} =: D^- \\ A = S^1 \end{array}$$

$$H^{-k} = (D^+ \times \mathbb{C}, \phi_R, D^- \times \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (D^+ \times \mathbb{C}^2, \phi_{-1} \oplus \phi_{-1}, D^- \times \mathbb{C}^2) \cong H^1 \oplus H^1 \\ (D^+ \times \mathbb{C}^2, \phi_{-2} \oplus \phi_0, D^- \times \mathbb{C}^2) \cong H^1 \oplus H^1 \oplus H^0 \end{array} \right.$$

$H^{-k} \otimes H^{-l} \cong (D^+ \times \mathbb{C}, \phi_{R+l}, D^- \times \mathbb{C})$

さらにこのとき,

$$\phi_{-1} \oplus \phi_{-1} \cong \phi_{-2} \oplus \phi_0$$

であるので

$$\underline{H^1 \oplus H^1 \cong H^1 \oplus H^1 \oplus H^0}$$

が成り立つ。

//

← E全体が直積になっているという事

- E: 自明束 $\Leftrightarrow E \cong X \times \mathbb{K}^n$

§1.2 K理論

以下, 特に断りなしに限り $K = \mathbb{C} \geq \mathbb{C}$,

X, Y はコンパクト Hausdorff 空間とする

$$E = K^n$$

$\downarrow \pi$

$$\bullet X = \{*\}$$

Def

$$\text{Vect}(X) := \{ X \text{ 上の } \mathbb{C}\text{-ベクトル束の同型類} \}$$

\nwarrow K 群からつくられる空間

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } X = \text{一点} \Rightarrow \text{Vect}_K(X) \cong \mathbb{N} \\ \cup \\ [E] \leftrightarrow \dim E \end{array} \right)$$

全射

一点上のベクトル束
= ベクトル空間

\uparrow
次元で同型類が決まる.

\bullet $\text{Vect}(X)$ は X の性質を反映する.

$[0,1]$: 可縮より従う

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } X = [0,1] \Rightarrow X \text{ 上のベクトル束は自明なもののみ} \\ X = S^1 \Rightarrow \text{非自明なベクトル束が存在する} \\ \text{(e.g. Möbius 束)} \end{array} \right)$$

\bullet $[E], [F] \in \text{Vect}(X)$ に対し

$$[E] + [F] := [E \oplus F]$$

群から逆元の存在を降いたもの

(= 単位元をもつ群)

と定めると, $\text{Vect}(X)$ は可換モノイドになる

\rightsquigarrow モノイドの構造を扱いたい

\rightarrow "逆元を加えて" 群にする.

群完備化

M : 可換モノイド に対し

$$G(M) := M \times M / \sim$$

\nwarrow "差" の集合

$$(m, n) \sim (m', n') \iff \exists p \in M \text{ s.t. } m + n' + p = m' + n + p$$

と定めると, $G(M)$ はアベル群になる.

$$0 = [0, 0], \quad -[m, n] = [n, m]$$

$G(M)$ は M の群完備化 あるいは Grothendieck 群 とする

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } G(\mathbb{N}) = \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

- $(m, n) \in M \times M$ に対応して

$$[m, n] \in G(M) \quad \leftarrow m - m = [m, m] = [0, 0] = 0$$

$$\Sigma \quad m - n$$

Σ かく.

- $\varphi: M \rightarrow N$: 可換モノイドの間の準同型

$$\Rightarrow G(\varphi): G(M) \rightarrow G(N) \quad \text{群準同型}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$[m] - [n] \mapsto [\varphi(m)] - [\varphi(n)]$$

K 群

Def

$$K(X) := G(\text{Vect}(X))$$

Σ X の K 群 といふ

K : Klassen の頭文字

\uparrow 分類モノイドの語

\uparrow Grothendieck の母語

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } X = \text{一点} \Rightarrow K(X) \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ [E] - [F] \leftrightarrow \dim E - \dim F \end{array} \right)$$

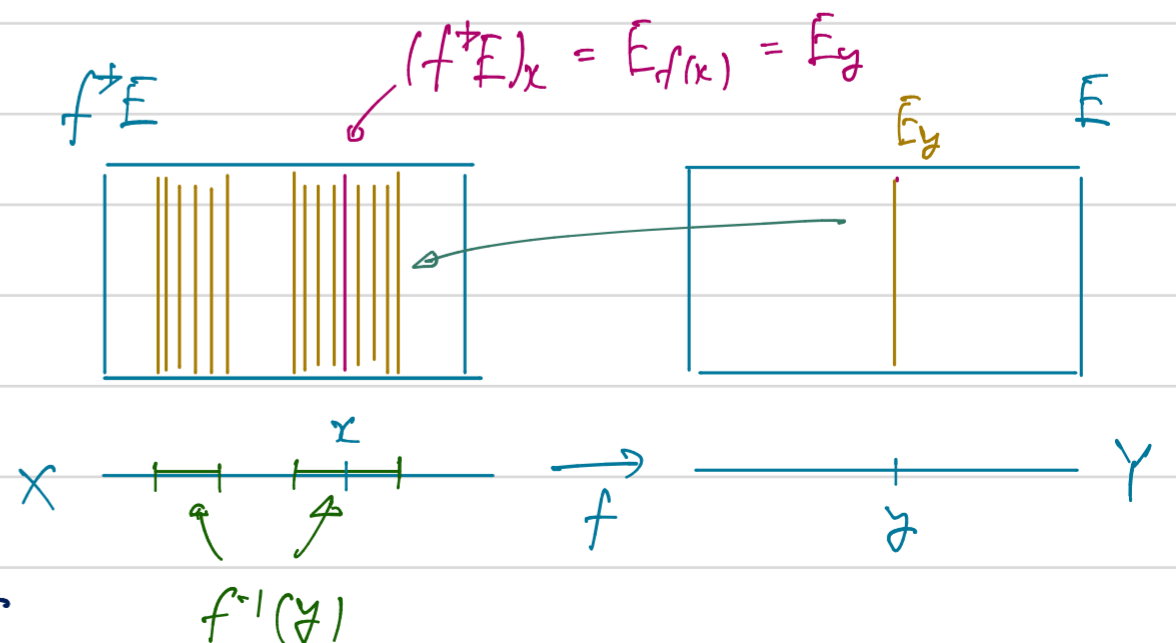
$f: X \rightarrow Y$: 連続, $E \rightarrow Y$. \wedge 外れ束

$\Rightarrow f^*E \rightarrow X$. \wedge 外れ束

か

$$(f^*E)_x = E_{f(x)}, \quad \forall x \in X$$

Σ 局所的に定まり.



$$\rightsquigarrow f^*: \text{Vect}(Y) \rightarrow \text{Vect}(X) : \text{準同型}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

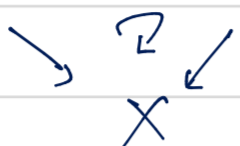
$$[E] \mapsto [f^*E]$$

• $E \rightarrow X$: ベクトル束

$\Rightarrow \exists F \rightarrow X$: ベクトル束

∃ $\lambda. E \oplus F \cong X \times \mathbb{C}^m$

$\rightsquigarrow \exists \varphi_E : X \times \mathbb{C}^m \rightarrow E$: 全射



X : コルハント Hausdorff が大事

$(\varphi_E)_x : \mathbb{C}^m \rightarrow E_x$

$\ker(\varphi_E)_x \cong \dim m-n$

$\text{rank } E := \dim E_x$

φ が $x \in X$ に依存する
 \geq 時に rank が定義された

$\rightsquigarrow \tilde{\varphi}_E : X \rightarrow \text{Gr}_\mathbb{C}(n, m)$, $n = \text{rank } E$

$x \mapsto (\ker(\varphi_E)_x)^\perp$

$\rightsquigarrow \text{Vect}_n(X) \cong [X, \varinjlim_m \text{Gr}_\mathbb{C}(n, m)]$

$\text{Vect}_n(X) := \text{rank } n$ のベクトル束
 の同型類

\varinjlim_n

$[E] \mapsto [\tilde{\varphi}_E]$

$\tilde{K}(X) \cong [X, BU]$, $BU = \varinjlim_{n, m} \text{Gr}_\mathbb{C}(n, m)$

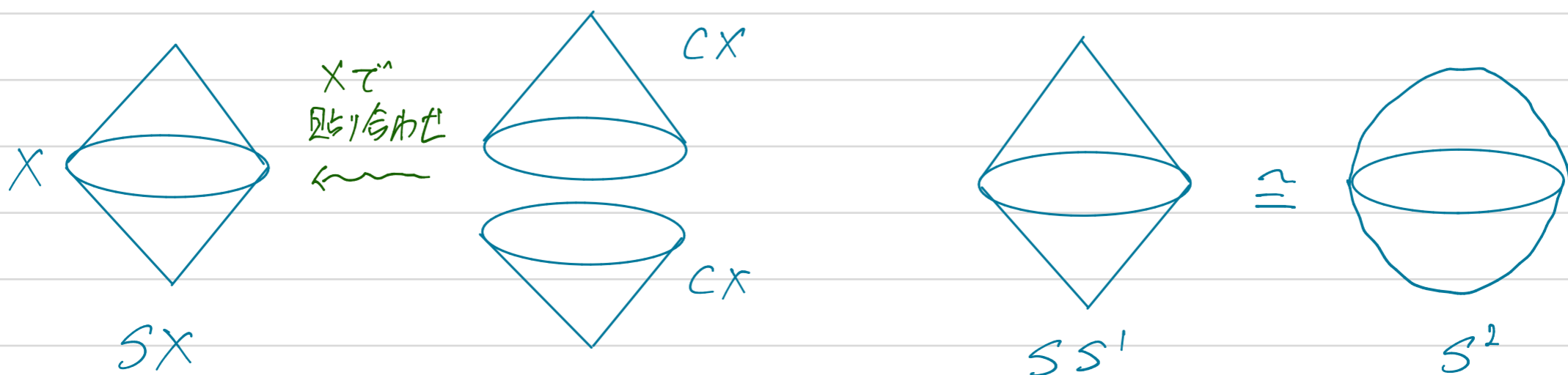
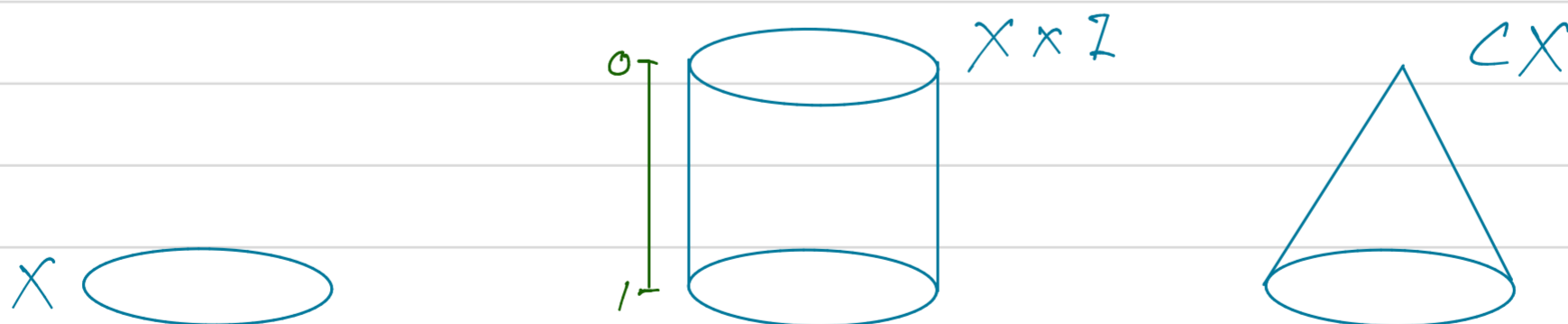
$\rightsquigarrow \underline{K}(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BU]$

• $I = [0, 1] \cong \mathbb{R}$

$CX := (X \times I) / X \times \{0\}$, X の錐 (cone)

$SX := (X \times I) / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, X の懸垂 (suspension)

$\cong CX \cup CX$



§1.3 K理論における Bott 周期性

Def

$n \geq 0$ に対して

$$\underline{\tilde{K}^{-n}(X)} := \tilde{K}(S^n X)$$

$$\underline{K^{-n}(X)} := \tilde{K}^{-n}(X^{\dagger})$$

$$\underbrace{SS \cdots S}_n X$$

$$(K^0 = K, \tilde{K}^0 = \tilde{K})$$

$$X^{\dagger} = X \sqcup \{*\}$$

Bott による Bott 周期性の証明から,

$$\text{Gr}(m, 2m) \hookrightarrow \Omega(U(2m))$$

が得られました.

$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ m}} \mathbb{Z} \times BU \cong \Omega(U)$

$$\underline{\mathbb{Z} \times BU} \cong \Omega(U)$$

従って,

$$K^{-2}(X) = \tilde{K}(S^2 X^{\dagger}) \cong [S^2 X^{\dagger}, U]_{*}$$

$$\cong [X^{\dagger}, \Omega U]_{*}$$

$$\cong [X^{\dagger}, \mathbb{Z} \times BU]_{*}$$

$$\cong [X, \mathbb{Z} \times BU] \cong K^0(X)$$

Thm (K理論における Bott 周期性)

$$K^{-2}(X) \cong K^0(X) \quad (\Leftrightarrow \tilde{K}^{-2}(X) \cong \tilde{K}^0(X))$$

$$\bullet K^{-n}(X) \cong K^{-n-2}(X), \quad \tilde{K}^{-n}(X) \cong \tilde{K}^{-n-2}(X)$$

$n > 0$ に対して

$$\underline{K^n(X)} := K^{n-2}(X), \quad \underline{\tilde{K}^n(X)} := \tilde{K}^{n-2}(X)$$

と帰納的に定めた.

$\rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ に対して K^n, \tilde{K}^n が定義された.

• Bott 周期性 から $\tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(SX) \cong \dots$

\tilde{K}^n は 一般 (簡約) コホモロジー である。

※ 一般 (簡約) コホモロジー

$$\tilde{h}^n: X \rightarrow \tilde{h}^n(X), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{a.s.}$$

(ホモトピー-不変性)

$$X \simeq Y \Rightarrow \tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^n(Y)$$

(半完全性)

$$Y \subset X$$

$$\Rightarrow \tilde{h}^n(X) \rightarrow \tilde{h}^n(Y) \rightarrow \tilde{h}^n(X/Y) : \text{完全}$$

(懸垂同型)

$$\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(SX)$$

• 逆に $\tilde{K}^{-2}(X) \cong \tilde{K}^0(X)$

K 群の計算

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{Z} \cong \tilde{K}(S^0) \cong \tilde{K}(S^2) \cong \tilde{K}(S^4) \cong \dots \\ 0 \cong \tilde{K}(S^1) \cong \tilde{K}(S^3) \cong \tilde{K}(S^5) \cong \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_n(\mathbb{C}P^\infty) = [S^n, \mathbb{C}P^\infty]_*$$

$$= \tilde{K}(S^n)$$

$$= \tilde{K}(S^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n \text{ odd}) \\ 0 & (n \text{ even}) \end{cases}$$

2-多様体群のホモトピー群に如く Bott 周期性

• $[E] \in K(X), [F] \in K(Y)$

$$\Rightarrow [E] \cdot [F] := [E \boxtimes F] \in K(X \times Y) \quad \text{が定まる.}$$

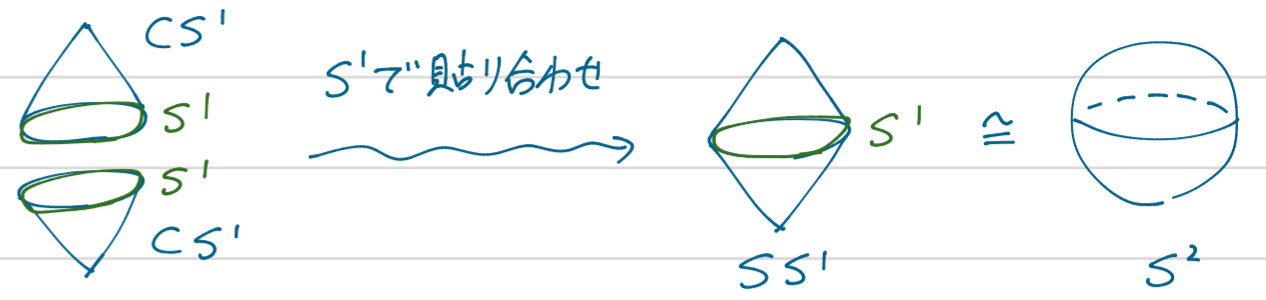
Thm (Fundamental Product Formula)

$$K(S^2) \times K(X) \xrightarrow{\cong} K(S^2 \times X)$$

これは Bott 周期性という = 2 も多い
(実際, $\tilde{K}^{-2}(X) \cong \tilde{K}^0(X) \cong \dots$ 同値になる)

§2 初等的証明

§2.1 基本方針



• $S^2 = SS^1$ とすると, S^2 上のベクトル束は連続写像 $S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ で決まる

• $\phi_{-1}: S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ から定まるベクトル束 $H' \cong H$ とかく
 $\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \mapsto & \mathbb{Z}^{-1} \end{matrix}$

← rank = 1 の自明束

← $b \in$ Bott 元という

• $b := [H] - [1] \in \tilde{K}(S^2) \subset K(S^2)$ は $\tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元になる

$$\begin{matrix} \downarrow \\ n \cdot b \leftrightarrow n \end{matrix}$$

← $\tilde{K}(S^2)$ の任意の元は $n \cdot b$ ($n \in \mathbb{Z}$) の形でかけるとのこと

Fact

b との積 $K(X) \rightarrow K(S^2 \times X)$ が Bott 周期性の同型
 $\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ a & \mapsto & b \cdot a \end{matrix}$

← $\beta \in$ Bott 写像という

$$\beta: \tilde{K}^0(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}^{-2}(X) = \tilde{K}(S^2 X)$$

を誘導する

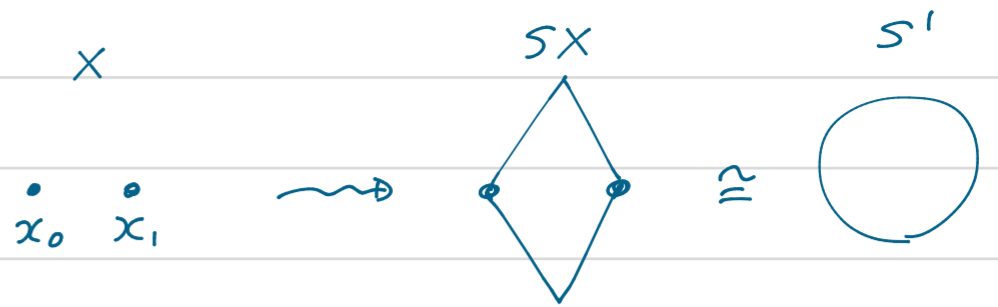
← $S^2 X \cong S^2 \wedge X$ から写像が定まる (スズ→シズ後)

☆ Bott 周期性の証明 \rightarrow β の逆写像 $\alpha: \tilde{K}^{-2}(X) \rightarrow \tilde{K}^0(X)$ を構成すればよい

§2.2 Observation

$$X = \{x_0, x_1\} \Rightarrow SX \cong S^1$$

(二点) $\Rightarrow S^2X \cong SS^1 \cong S^2$



$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \beta: \tilde{K}(X) \cong \mathbb{Z} &\longrightarrow \tilde{K}(S^2X) \cong \tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow n &\longmapsto \downarrow n \cdot b \\ &\text{rank } \tilde{K}(S^2) \text{ の生成元} \end{aligned}$$



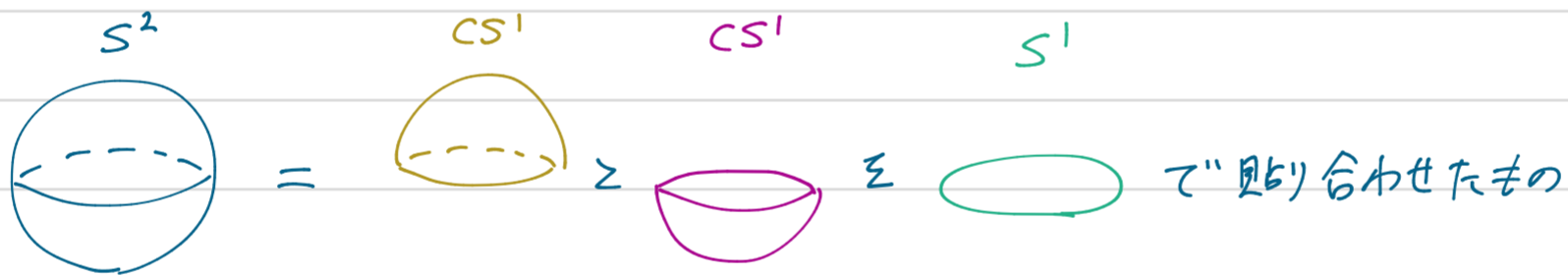
$$\rightsquigarrow \alpha: \tilde{K}(S^2) \longrightarrow \tilde{K}(X) \cong \mathbb{Z} \quad \text{と定めればよい}$$

$\downarrow n \cdot b \longmapsto \downarrow n$

i.e. $\tilde{K}(S^2)$ における b の係数 を求めればよい!

Q. どうやって求めるか?

A. 「 S^2 上のベクトル束は連続写像 $\varphi: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ で決まる」ことを使う



$\rightsquigarrow S^2$ 上のベクトル束は $E_\varphi = (\eta, \varphi, \eta)$ の形でかける
 $\hookrightarrow CS^1$ 上の自明束 $\eta \oplus \varphi: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ で貼り合わせたもの
 $\hookrightarrow \text{rank} = n$ の自明束

$$K(S^2) \cong \tilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z} \quad \text{に注意して, いくつか例を計算してみる}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $[E] \longleftrightarrow \alpha(E) \cdot b + \beta(E) \cdot [1]$ rank = 1 の自明束

- $\varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ \hookrightarrow 自明束同士をそのまま貼り合わせた \Rightarrow 自明束
- $\Rightarrow E_\varphi = S^2 \times \mathbb{C}^2$
- $\Rightarrow [E_\varphi] = [\eta] = n \cdot [1]$
- $\Rightarrow \alpha(E_\varphi) = 0, \beta(E_\varphi) = n$

- $\varphi(z) = \phi_{-1}(z) = z^{-1} \in GL_1(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow E_\varphi = (\perp, \phi_{-1}, \perp) = H$$

$$\Rightarrow [E_\varphi] = [H] = b + [1]$$

↑ Hの定義
↑ bの定義

$$\Rightarrow \underline{\alpha(E_\varphi) = 1}, \quad \cancel{\gamma(E_\varphi) = \dots}$$

- $\varphi(z) = \phi_{-k}(z) := z^{-k} \in GL_1(\mathbb{C}), \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow E_\varphi = (\perp, \phi_{-k}, \perp) \cong (\perp, \phi_{-1}, \perp) \otimes \dots \otimes (\perp, \phi_{-1}, \perp)$$

$$= H \otimes \dots \otimes H$$

$$\Rightarrow [E_\varphi] = [H]^k \quad \leftarrow [H]^2 - 2[H] + [1] = 0 \text{ in } K(S^2)$$

$$= k \cdot ([H] - [1]) + [1]$$

$$= k \cdot b + [1]$$

$$\leftarrow H \otimes H \cong H \otimes H \otimes H^{\otimes 2}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha(E_\varphi) = k}, \quad \gamma(E_\varphi) = 1$$

- $\varphi(z) = \begin{pmatrix} z^{-k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{-k} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow E_\varphi \cong \underbrace{[H]^k \oplus \dots \oplus [H]^k}_n$$

$$\Rightarrow [E_\varphi] = n \cdot [H]^k$$

$$= n(k \cdot b + [1]) = nk \cdot b + n[1]$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha(E_\varphi) = nk}, \quad \gamma(E_\varphi) = n$$

\leadsto $\alpha(E)$ の計算のキホン: (貼り合わせ回数 ε) より簡単な形に帰着する
 (既存の形)

- $\varphi(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix}} + A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A \in M_n(\mathbb{C})$
 $= zI + A \quad (I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}))$

$\Rightarrow ?$

$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は既に計算済み

$2I + A \in GL_n(\mathbb{C})$ の中で変形して $2I$ の形に変形したい

$t \in [0, 1]$ とし

$t=1$ $t=0$
 \downarrow \downarrow

$2I + tA$ を考えると $2I + A \simeq 2I$ となり、 $M_n(\mathbb{C})$ でのホモトピーはつくれる

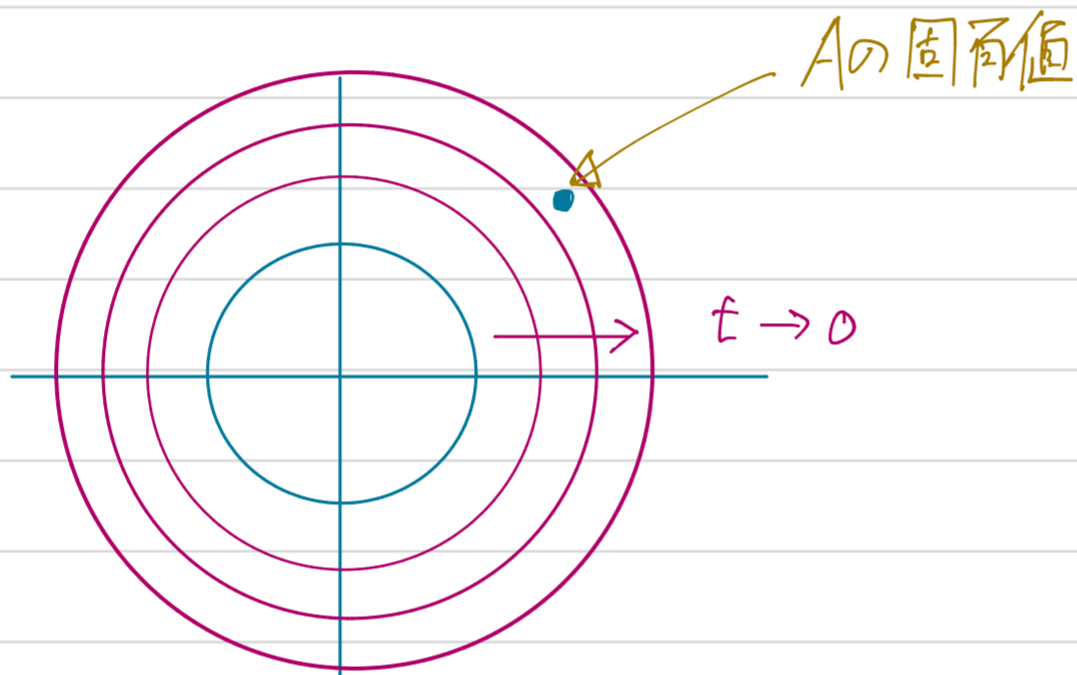
しかし、 $\exists \lambda \in \mathbb{C} \{|\lambda| > 1\}$ に A の固有値があったとすると、

$\exists t \in (0, 1)$

したがって、 $2I + tA$ は可逆でない

$\leadsto 2I + tA$ は $GL_n(\mathbb{C})$ でのホモトピーにはならない

$2I + tA$: 可逆でない
 $\Leftrightarrow \frac{2}{t}I + A$: 可逆でない
 $\Leftrightarrow \exists z \in S^1$
 したがって $\frac{z}{t}$ は A の固有値
 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 1$
 したがって λ は A の固有値



$\leadsto \star A$ の固有値に応じて \mathbb{C}^n を分割する!
 (スペクトル分解)

Fact

$\exists \mathbb{C}^n = V^+ \oplus V^-$: 直和分割

したがって、
 $\left\{ \begin{array}{l} V^\pm \text{ は } 2I + A \text{ で不変かつ} \\ (2I + A)|_{V^+} \text{ は } \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > 1\} \text{ に固有値をもたない} \\ (2I + A)|_{V^-} \text{ " } \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \text{ " "} \end{array} \right.$

Observation の続き

* $z = (z_1, \dots, z_n)$, $a, b \in M_n(\mathbb{C})$

• $E = (\mathbb{1}, a z + b, \mathbb{1})$ ← $a z + b$ は $\forall z \in S^1$ で isom を仮定

⇒ $z + b$ の場合に帰着できる

☺ $\forall t \in [0, 1]$ に対して $\frac{1}{1+tz} = (1+tz)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+tz} & & \\ & \dots & \\ & & \frac{1}{1+tz} \end{pmatrix}$

$(1+tz) \left(a + \frac{z+t}{1+tz} + b \right) = (a+tb)z + ta + b$

を考えると

左辺: $t=0$ で $a z + b$
 $t \in [0, 1)$ で invertible

右辺: $a + tb$ を考えると

• $t=1$ で invertible

• さらに

$t \mapsto \det(a+tb)$: conti.

かつ, $a+tb$ は 1 の近くにある $t_0 \in [0, 1]$ で invertible

← $t \in [0, 1)$ に対して, 左辺は $a z + b$ に
 $S^1 \rightarrow S^1$; $z \mapsto \frac{z+t}{1+tz}$
 による変換 z
 $1+tz \neq 0$ $t \neq 1$
 のスカラー倍 z は $z=1$ 以下のもの

$\left| \frac{z+t}{1+tz} \right| = \left| \frac{z(z+t)}{1+tz} \right|$
 $\left| \frac{z(z+t)}{1+tz} \right| = \left| \frac{1+tz}{1+tz} \right| = 1$

ここで

$f: \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{1}$. isom に対して

$(\mathbb{1}, f, \mathbb{1}) \cong (\mathbb{1}, f \circ g, \mathbb{1})$

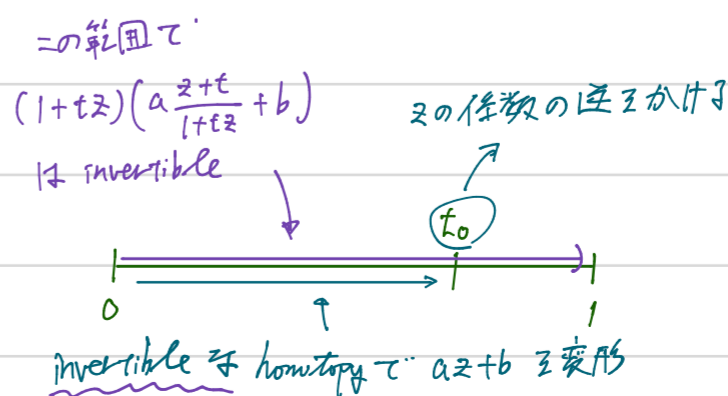
に注意すると,

$(a+t_0 b) z + t_0 a + b \cong z + (t_0 a + b)(a+t_0 b)^{-1}$

は同型なベクトル束を定め,

$a z + b \xrightarrow{(1+tz) \left(a \frac{z+t}{1+tz} + b \right)} (1+t_0 z) \left(a \frac{z+t_0}{1+t_0 z} + b \right) = (a+t_0 b) z + t_0 a + b$
 \uparrow $t=0 \rightarrow t_0$ $\cong \underbrace{z + (t_0 a + b)(a+t_0 b)^{-1}}_{z+b \text{ の形}}$

であるので, $z+b$ の形にできる.



Rmk

Atiyah-Bott では Dunford 分解を仮定して $a z + b$ を直接 "スペクトル分解" している //

$a_k \in M_n(\mathbb{C})$

$E = \left(\underline{1}, \sum_{k=0}^m a_k z^k, \underline{1} \right)$

$\Rightarrow a z + b$ を考えれば仮定に帰着できる.

⊙

$a := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\}^{m+1}$, $b := \begin{pmatrix} a_0 & & & a_m \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}^{m+1}$

$M_n(\mathbb{C})$ 成分の行列

$P_r(z) := \sum_{k=r}^m a_k z^{k-r}$ $(P_r(z) - z P_{r+1}(z) = a_r)$

$P(z) := P_0(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$

よって,

$a z + b = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & P_1 & \dots & P_m \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{=: 1+N_1} \underbrace{\begin{pmatrix} P & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{= P \oplus I_m} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -z & & & \\ & \ddots & & \\ & & -z & 1 \end{pmatrix}}_{= 1+N_2} = (1+N_1)(P \oplus I_m)(1+N_2)$

$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & \dots & P_m \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -z & & & \\ & \ddots & & \\ & & -z & 0 \end{pmatrix}$

であり,

N_1, N_2 : nilpotent かつ

$1 + t N_i \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} 1$ $(i=1,2)$ \leftarrow invertible 同変 $\Rightarrow a z + b = (1+N_1)(P \oplus I_m)(1+N_2) \rightarrow P \oplus I_m$

よって,

$E \oplus m \cdot \underline{1} \cong ((m+1)\underline{1}, a z + b, (m+1)\underline{1})$

が成り立つ

\Rightarrow 右辺に行列計算が $\alpha_1(E)$ が計算できる !! //

Rmk

Atiyah による \geq 上の帰着は高階の線形微分方程式 \geq
連立線形微分方程式に帰着させた方法に着想 \geq 得たらしい

n 階線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x) \quad \dots (*)$$

において

$$y_1 := y$$

$$y_2 := y'$$

\vdots

$$y_n := y^{(n-1)}$$

\geq おく \geq , (*) は 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_1(x)y_n - \dots - a_n(x)y_1 + b(x) \end{cases}$$

\geq 同値であり, \geq は

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & \dots & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix}}_{\text{}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

\geq かけた

\uparrow $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ において 1 次

↖ Laurent poly

$$\bullet E = (\underline{n}, \sum_{k=-l}^m a_k z^k, \underline{n})$$

⇒ $\sum_{k=0}^m a_k z^k$ の場合に帰着できる

$$\textcircled{\smile} P := \sum_{k=-l}^m a_k z^k$$

$$P' = z^l P = \sum_{k=0}^{m+l} a_{k-l} z^k \leftarrow \text{polynomial}$$

∴

$$E \otimes H^{-l} \cong (\underline{n}, P', \underline{n})$$

$$\uparrow H^{-l} = (\underline{1}, z^l, \underline{1})$$

⇒ $\sum_{k=0}^m a_k z^k$ に行列計算により $\chi_i(E)$ を計算できる //

//

$$\bullet E = (\underline{n}, f, \underline{n}), \quad f: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) : \text{conti.}$$

⇒ Laurent poly. の場合に帰着できる

⊙

Fejérの定理より f は Laurent poly. に 1/n 近似でき,

$$GL_n(\mathbb{C}(S^1)) \subset \underset{\text{open}}{M_n(\mathbb{C}(S^1))} \quad \text{であるので}$$

$$f \sim_h P$$

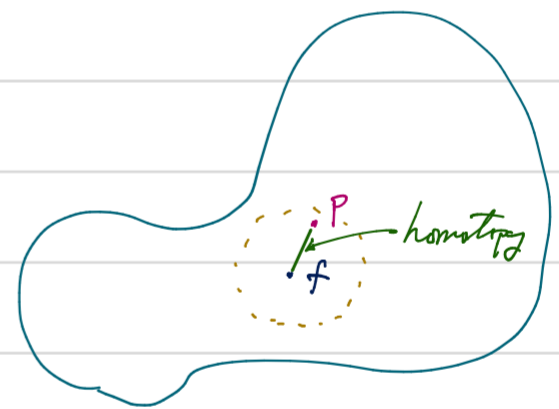
∴ invertible な homotopy \geq Laurent poly. があるから

$$E \cong (\underline{n}, P, \underline{n})$$

∴

//

$GL_n(\mathbb{C}(S^1))$



§2.3 Atiyah-Bott による証明の概略

① $S^2 \times X$ 上のベクトル束は $\varphi: S^2 \times X \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を用いて E_φ の形でかける

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (z, x) & \mapsto & \varphi(z, x) \end{array}$$

② φ は Laurent 多項式で近似

$$\varphi(z, x) \rightsquigarrow \sum_{k=-m}^{\ell} a_k(x) z^k$$

(Fourier 解析における Fejér の定理の一般化)

③ z^m をかけて Laurent 多項式を多項式に変形

$$\varphi(z, x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\ell+m} a_{k-\ell} z^k$$

(n 階線形微分方程式を
一階連立微分方程式に変形するにこのアナロジー)

④ 多項式を線形化

$$\varphi(z, x) \rightsquigarrow B(x) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + C(x)$$

$$(A(x), C(x) \in GL_n(\mathbb{C}))$$

⑤ $zI + A$ の形に帰着

$$\varphi(z, x) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + A(x)$$

$$(A(x) \in GL_n(\mathbb{C}))$$

(※ 実際の Atiyah-Bott の論文では
 $B(x) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + C(x)$ を直接
スベクトル分解している)

⑥ スベクトル分解

$\rightsquigarrow A(x)$ の $|\lambda| < 1$ に対応する固有空間 $V^+(x)$ を

ファイバーとして X 上のベクトル束 $\alpha(E_\varphi)$ が与えられる

⑦ $K(S^2 \times X) \rightarrow K(X)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ [E_\varphi] & \mapsto & -[\alpha(E_\varphi)] \end{array}$$

がい

$$\alpha: \widehat{K}(S^2 \times X) \rightarrow \widehat{K}(X)$$

誘導する

§3 後の指数を用いた証明

任意の Cauchy 列が
収束先をもつ

§3.1 Fredholm 作用素

内積が定まっている
(複素)線形空間であって、
その内積から定まるノルムが完備

H : (複素) Hilbert 空間 とする

- 線形写像 $T: H \rightarrow H$ が 有界作用素

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|T\| := \sup_{0 \neq v \in H} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} < \infty$$

T によるベクトルの "伸び率" が有界ということ

⚠ Hilbert 空間 \neq 無限次元線形空間
(有限次元 Hilbert 空間もある、
Hilbert 空間でない無限次元線形空間もある)

- $\mathcal{B}(H) := \{T: H \rightarrow H : \text{有界作用素}\}$ とする

$$T, S \in \mathcal{B}(H), \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} (T+S)(v) := Tv + Sv \\ (\lambda T)(v) := \lambda Tv \end{cases}$$

- $T \in \mathcal{B}(H)$ に対して

$$\text{Ker}(T) := \{v \in H \mid Tv = 0\}$$

$$\text{Im}(T) := \{w \in H \mid \exists v \in H \text{ s.t. } w = Tv\}$$

$$\text{Coker}(T) := H / \text{Im}(T)$$

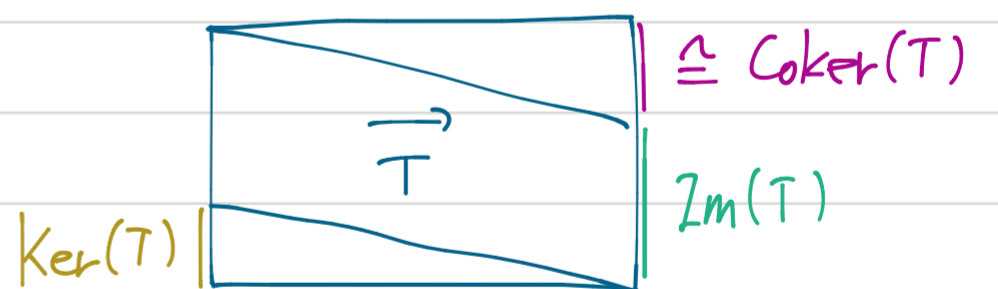
はいずれも線形空間

$\mathcal{B}(H)$ は線形空間
 $\|T\|$ は $\mathcal{B}(H)$ 上のノルムになる
(作用素ノルムという)

Def

$T \in \mathcal{B}(H)$ が Fredholm 作用素

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim(\text{Ker}(T)) < \infty, \dim(\text{Coker}(T)) < \infty$$



- $\text{Fred}(H) := \{T \in \mathcal{B}(H) : \text{Fredholm 作用素}\}$ とかく

- $T \in \text{Fred}(H)$ に対して

$$\text{Index}(T) := \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Coker}(T)) \in \mathbb{Z}$$

ΣT の 指数 (index) という

次元定理

(e.g. $\dim H < \infty \Rightarrow \forall T \in \mathcal{B}(H)$ は Fredholm であり, $\text{Index}(T) = 0$)

Ex

$$H = \ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad k \geq 0$$

$$S_k : H \xrightarrow{\quad} H \quad \leftarrow \text{ニット作用素という}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$(a_0, a_1, \dots) \mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_k, \underbrace{a_0, a_1, \dots}_{\text{Im}(S_k)})$$

$\cong \text{Coker}(S_k) \quad \text{Im}(S_k)$

よって S_k は Fredholm 作用素であり,

$$\text{Index}(S_k) = \underbrace{\dim(\text{Ker}(S_k))}_{=0} - \underbrace{\dim(\text{Coker}(S_k))}_{=k} = -k \quad \neq$$

正確には同値類の集合

$$L^2(S') := \left\{ f: S' \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{S'} |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

$\Rightarrow \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : L^2(S')$ の直交基底

$$\left(\begin{array}{ccc} \phi_k : S' & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \mapsto & z^k \end{array} \right)$$

$$H^2(S') := \overline{\text{span}\{\phi_k \mid k \geq 0\}} \quad \leftarrow \text{Hardy 空間という}$$

$P: H = L^2(S') \rightarrow H^2(S') : \text{直交射影}$ である

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \phi_k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k$$

このとき, $f \in C(S') := \{f: S' \rightarrow \mathbb{C} : \text{連続}\}$ に対して合成

$$T_f : H^2(S') \hookrightarrow L^2(S') \xrightarrow{M_f} L^2(S') \xrightarrow{P} H^2(S')$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $g \mapsto fg$

$\leftarrow \text{かけ算作用素という}$

Σ Toeplitz 作用素 という

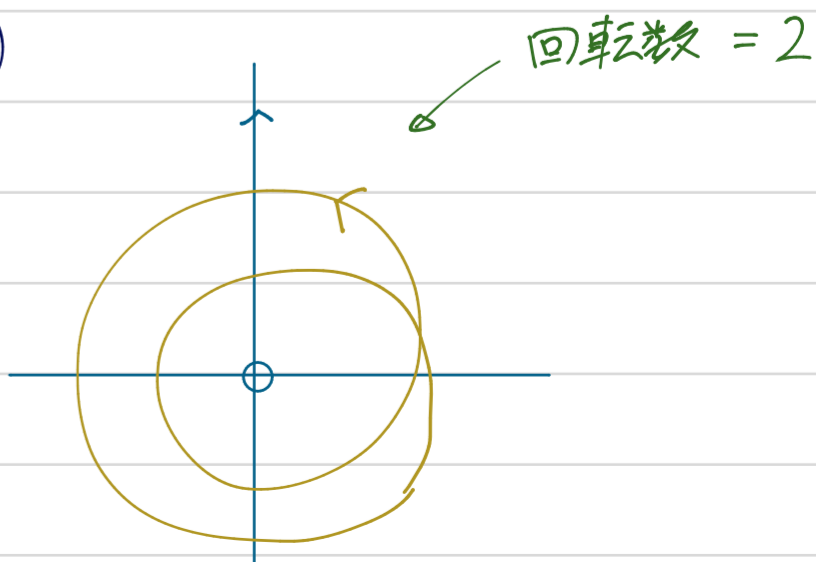
Thm (Toeplitz 作用素の指数定理, Gohberg-Krein, 1960)

$H := H^2(S'), f \in C(S')$ である

$f(z) \in GL_1(\mathbb{C}) (= \mathbb{C} \setminus \{0\}), \forall z \in S'$

$\Rightarrow T_f \in \text{Fred}(H)$ であり,

$$\text{Index}(T_f) = -(\text{f の回転数})$$



e.g., $f(z) = \phi_k(z) = z^{-k}$ ↖ 回転数 = $-k$

$$\Rightarrow M_f \left(\sum_{l \geq 0} \lambda_l z^l \right) = \sum_{l \geq 0} \lambda_l z^{l-k}$$

$$\Rightarrow T_f \left(\sum_{l \geq 0} \lambda_l z^l \right) = \sum_{l-k \geq 0} \lambda_l z^{l-k}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(T_f)) = k, \dim(\operatorname{Coker}(T_f)) = 0$$

$= \operatorname{span} \{z^0, \dots, z^{k-1}\}$

$$\Rightarrow \operatorname{Index}(T_f) = k = -(f \text{ の 回転数 })$$

§3.2 族の指数

H : 無限次元 Hilbert 空間

$X = \{x_0\}$: 一点集合

このとき,

X : 一点

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow K(X) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [E] - [F] & \leftrightarrow & \dim E - \dim F \\ \uparrow \uparrow & & \\ \text{vector sp} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fred}(H) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & K(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \longmapsto & \text{Index}(T) & \leftrightarrow & [\ker(T)] - [\text{Coker}(T)] \\ & & \parallel & & \\ & & \dim(\ker(T)) - \dim(\text{Coker}(T)) & & \end{array}$$

$$T \in \mathcal{C} \Big| H$$

より, 指数を $K(X)$ の元 と みる ことができる

→ これを任意のコンパクト Hausdorff 空間に一般化した

(Fredholm 作用素 が " $x \in X$ で "パラメータ" されて いる と みる)

→ Fredholm 作用素の族 $\{T_x\}_{x \in X}$ と みる ことができる

Def

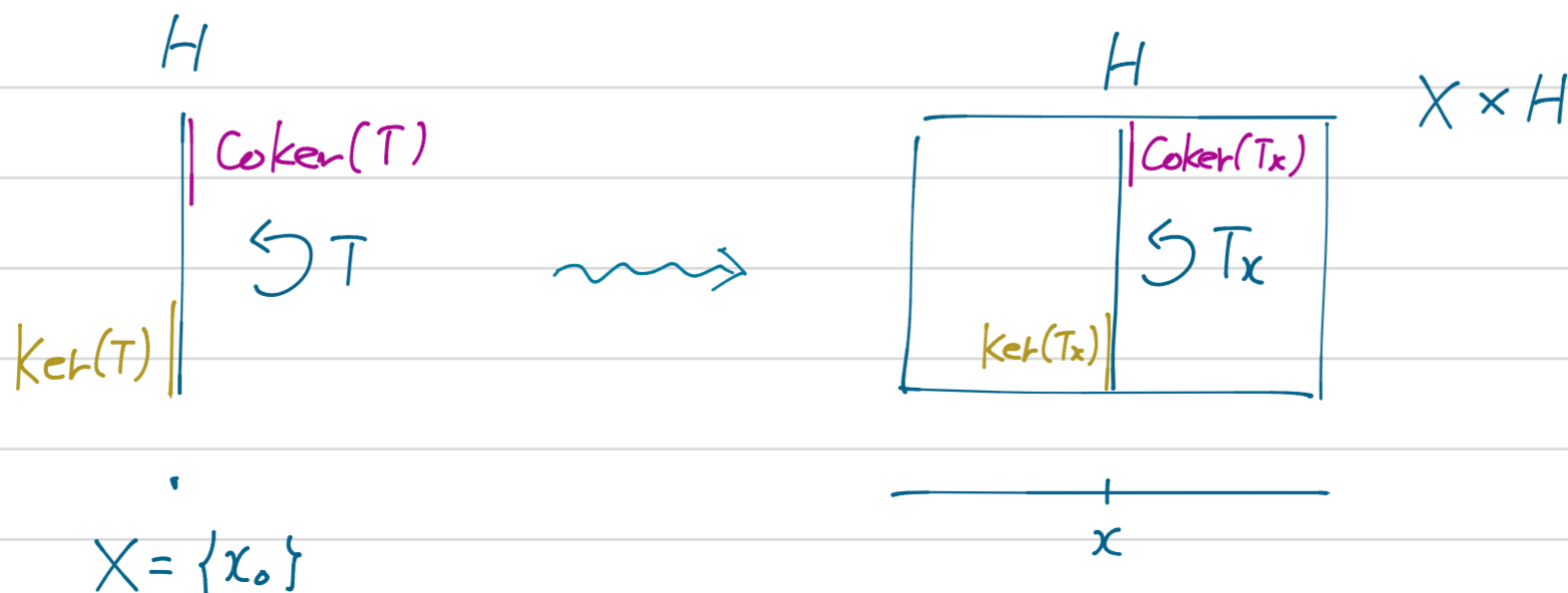
$T: X \rightarrow \text{Fred}(H)$: 連続 に対して

$$\text{Index}(T) := \left[\bigcup_{x \in X} \ker(T_x) \right] - \left[\bigcup_{x \in X} \text{Coker}(T_x) \right] \in K(X)$$

を Fredholm 作用素の族 T の 指数 という

⚠ 正確にはこの定義は正しくない

($\bigcup \ker(T_x)$ や $\bigcup \text{Coker}(T_x)$ が "ベクトル束" になるとは限らないため)



- 族の指数は群準同型

← 実はこれは同型になる
(Atiyah-Jänichの定理)

$$[X, \text{Fred}(H)] \longrightarrow K(X)$$

↓

$$[T] \longrightarrow \text{Index}(T)$$

を定める

§3.3 Atiyah による証明

Bott map

方針. $\beta: K(X) \rightarrow K(S^2 \times X)$ の逆射を構成する

observation

Atiyah-Bott の証明: $K(S^2) \cong \tilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z}$

$$[E_\rho] \leftrightarrow \alpha(E_\rho) \cdot b + \beta(E_\rho) \cdot [!]$$

この係数を $\varphi: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ から計算するところがポイント

$$\varphi(z) = \varphi_{-k}(z) = z^{-k} \quad \leftarrow \text{上でやった計算}$$

$$\Rightarrow [E_\rho] = k \cdot b + [!]$$

$$\Rightarrow \alpha(E_\rho) = k = -(\varphi_{-k} \text{の回転数}) = \text{Index}(T\varphi_{-k})$$

→ 貼り合わせ関数 $\varphi: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

から定まる Toeplitz作用素の指数が係数を与えている!

→ これを $\varphi: S^1 \times X \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ に一般化した

$\alpha: K(S^2 \times X) \rightarrow K(X)$ の構成

① $S^2 \times X$ 上のベクトル束は $\varphi: S^1 \times X \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を用いて E_φ の形でかける

$$(z, x) \mapsto \varphi(z, x)$$

② $x \in X$ に対して, $f_x: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ とすると, 合成

$$z \mapsto \varphi(x, z)$$

より正確には \mathbb{C}^n でなく φ で貼り合わせられる X 上のベクトル束のファイバーとのテンソル積をとる

$$T_{f_x}: H^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \hookrightarrow L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{M_{f_x}} L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{P \otimes 1} H^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n$$

↑ 行列のかけ算として作用

は $H := H^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^n$ 上の Fredholm作用素となり, 族 $T_\varphi := \{T_{f_x}\}_{x \in X}$ が定まる

$$\textcircled{3} \quad K(S^2 \times X) \rightarrow K(X)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$[E_\varphi] \mapsto \text{Index}(T_\varphi)$$

← これが α

Atiyah's rotation trick

- X : 局所コンパクト Hausdorff 空間

$$\Rightarrow K(X) := \tilde{K}(X^+) \quad \leftarrow \text{一点を無限大に}$$

- $b \in \tilde{K}(S^2) \cong K(\mathbb{R}^2)$

$$\beta: K(X) \xrightarrow{\cong} K(\mathbb{R}^2 \times X) \quad \text{存在}$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$X \longmapsto bX$$

$$\left(\begin{array}{l} \rightsquigarrow K(S^2 \times X) \cong K(\mathbb{R}^2 \times X) \oplus K(X) \quad \text{から} \\ \beta: K(X) \xrightarrow{\cong} K(S^2 \times X) \quad \text{が存在する} \end{array} \right)$$

$$\alpha: K(\mathbb{R}^2 \times X) \hookrightarrow K(S^2 \times X) \xrightarrow{\alpha} K(X)$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$[E_p] \longmapsto \text{Index}(T_p)$$

$\rightsquigarrow \alpha$ が β の逆射に等しい \Rightarrow 存在する

- α の性質

$$K(\mathbb{R}^2 \times X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X \times Y)$$

$$\downarrow \alpha_X \otimes 1 \quad \quad \quad \downarrow \alpha_{X \times Y} \quad \quad \quad \Delta_Y$$

$$K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$$

$$(A2) \quad \alpha(b) = 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} b = [H^1] - [H^0] \\ = \underbrace{[(1, z^{-1}, 1)]}_{\text{index} = 1} - \underbrace{[(1, z^0, 1)]}_{\text{index} = 0} \\ \text{Index}(T_{z^k}) = -k \end{array}$$

Thm

$\alpha: K(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow K(X)$: 群準同型 かつ (A1), (A2) をみたす

$\Rightarrow \alpha \circ \beta$ は互いに逆写像

(\Leftarrow)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(A1) かつ} & (b, x) & \xrightarrow{\beta} bx \\
 & K(\mathbb{R}^2) \otimes K(X) & \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X) \\
 & \downarrow \alpha \otimes 1 & \downarrow \alpha \\
 & K(\mathbb{R}^2) \otimes K(X) & \xrightarrow{\cong} K(X) \\
 & \underbrace{(\alpha(b), x)}_{\text{"(A2)"}} & \longmapsto x = \alpha(bx) = \alpha\beta(x)
 \end{array}$$

よって $\alpha\beta = 1$

$\Upsilon = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc}
 & (u, b) & \longmapsto ub \\
 & K(\mathbb{R}^2 \times X) \otimes K(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2) \\
 & \downarrow \alpha_X \otimes 1 & \cong \downarrow \alpha_{X \times \mathbb{R}^2} \\
 & K(X) \otimes K(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow K(X \times \mathbb{R}^2) \\
 & (\alpha(u), b) & \longmapsto \alpha(u)b = \alpha(ub)
 \end{array}$$

すなわち

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \leftarrow \text{Atiyah の 回転 } \tau \rightarrow$$

$\cong \mathbb{R}^4$

$$\det(\tau) = 1, \quad \tau \cong \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ in } GL_4(\mathbb{R})$$

よって,

$$\tau^* = \text{id} : K(\mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2)$$

一方,

$$\tau^*(ub) = b\tilde{u}$$

$$u = v \otimes w$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = w \otimes v$$

$$\Rightarrow \tau^*(u \otimes b)$$

$$= \tau^*(v \otimes w \otimes b)$$

$$= b \otimes w \otimes v$$

$$= b \otimes \tilde{u}$$

すなわち

$$K(\mathbb{R}^2 \times X) \cong K(X \times \mathbb{R}^2)$$

$$\underbrace{u}_{\tilde{u}} \longleftrightarrow \underbrace{u}_{\tilde{u}}$$

いま

$$\begin{aligned} \alpha(ub) &= \alpha(\tau^*(ub)) \\ \alpha(u)b &= \alpha(b\tilde{u}) \\ &= \alpha\beta(\tilde{u}) = \tilde{u} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{id} \\ \alpha\beta = 1 \\ \in K(X \times \mathbb{R}^2) \cong K(\mathbb{R}^2 \times X) \end{array}$$

で「あ」の「あ」

$$\begin{array}{l} \tilde{u} \leftrightarrow u \\ \alpha(u)b \leftrightarrow b\alpha(u) \end{array}$$

$$u = b\alpha(u) = \beta\alpha(u)$$

Σ 有り, 従って

$$\beta\alpha = \text{id}$$

か-成-り-左-つ

□